26 février 2007 Nom:
10h30–12h20

MAT-19519 Examen 1

1. (a) Considérons le SIF constitué des deux similitudes

$$w_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

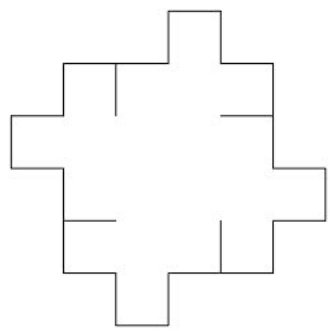
et

$$w_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quelle est la dimension de similitude du système?

(b) Désignons par $h^s(K)$ la mesure de Hausdorff de dimension s d'un compact K. Supposons qu'un certain compact F est de dimension de Hausdorff $\frac{1}{3}$. A quoi ressemble le graphe de $h^s(F)$ en fonction de s? Tracer tous les graphes possibles.

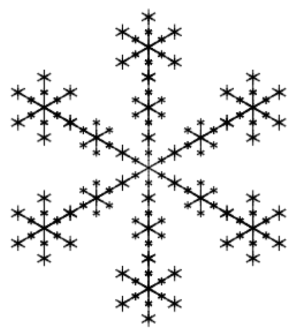
(c) On a défini un L-système en posant `Angle = 4` et `Axiome: F+F+F+F`. La première itération produit la figure ci-dessous. Dessiner le générateur à côté de la figure.



(d) Compléter la définition du L-système qui correspond au générateur suivant:

```
Axiome:  F
Angle =
F =
```

(e) Lequel de ces L-systèmes a produit le joli flocon suivant? Encercler la bonne réponse.

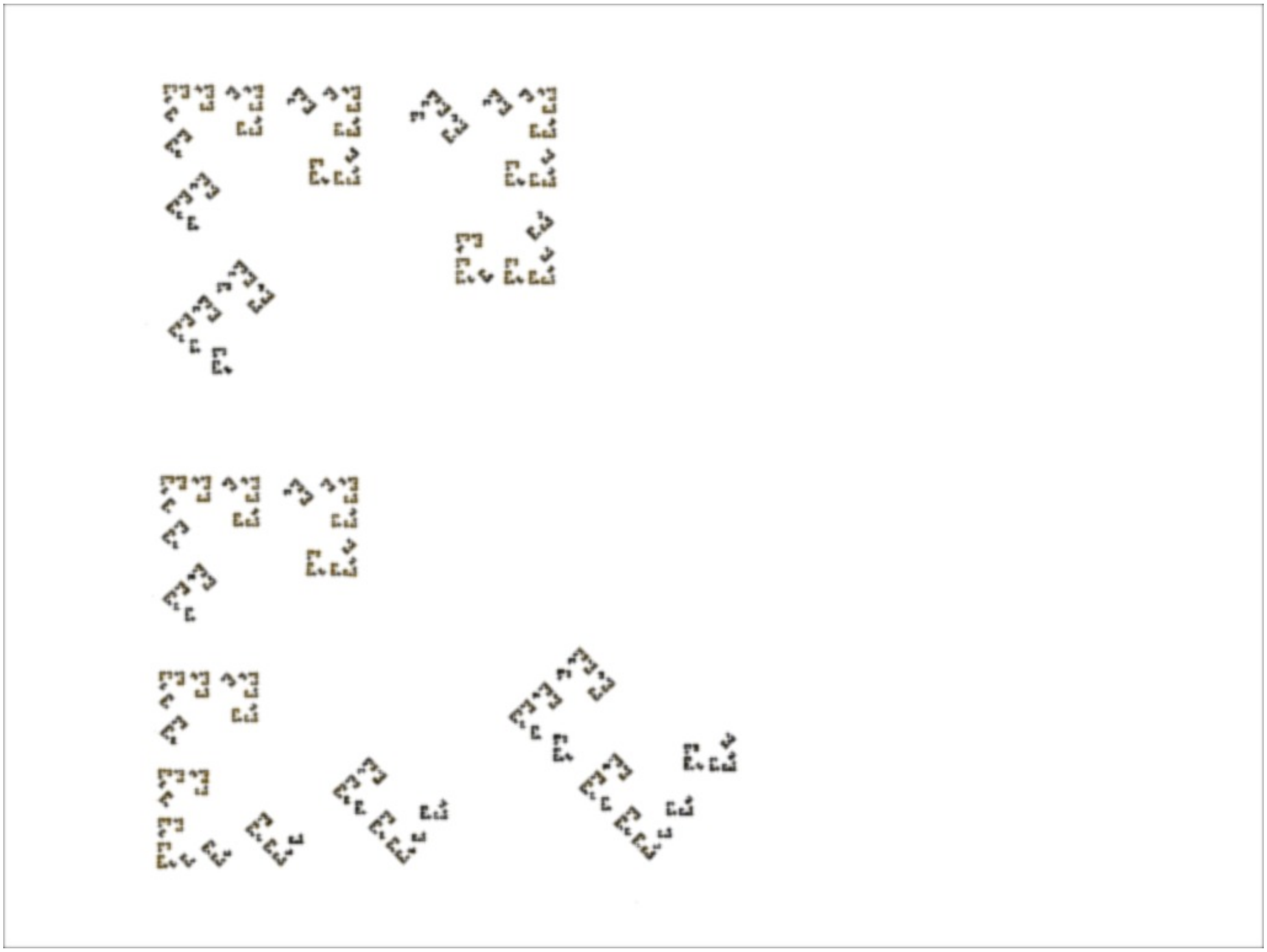


(i) `angle=6`
`A=Axiome: [F]+[F]+[F]+[F]+[F]+[F]`
`F=FF[A]`

(ii) `angle=6`
`A=Axiome: F+F+F+F+F+F`
`F=FF[A]`

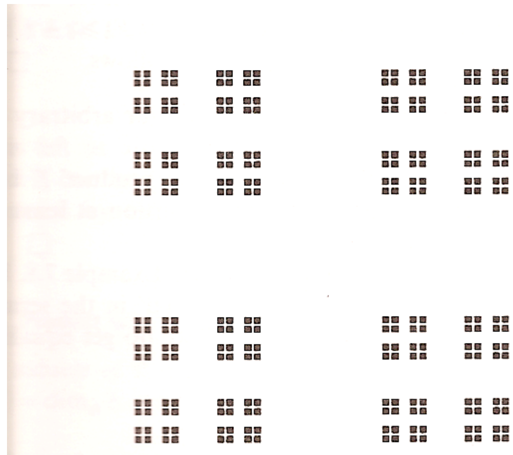
(iii) `angle=12`
`A=Axiome: [FF]++[F]++[FF]++[F]++[FF]++[F]`
`F=FF[A]`

2. Déterminer un système itératif de fonctions qui a le fractal suivant comme attracteur, en écrivant les transformations sous forme matricielle.



(suite)

3. Le fractal F suivant est appelé le *tartan de Cantor*.



Pour le construire, dans une première étape on obtient F_1 en retranchant du carré unité la bande verticale de largeur $1/3$ centrale, ainsi que la bande horizontale centrale. Puis, aux étapes suivantes, F_n est construit en effectuant la même opération sur les carrés restants. On définit F par $F = \bigcap_n F_n$.

(a) Calculer la dimension box-counting de F.

(b) Montrer que F est l'attracteur d'un SIF. (On ne demande pas d'écrire explicitement les contractions: une description géométrique sera suffisante).

(c) En appliquant un théorème vu au cours, déduire la valeur de la dimension de Hausdorff de F.

4. On définit

$$w_1(x,y) = \left(\frac{3}{4}x, \frac{3}{4}y\right) \qquad \text{et} \qquad w_2(x,y) := \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

Pour K un compact du plan, on définit

$$F(K) = w_1(K) \cup w_2(K).$$

(a) Soit K_0 le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$. Déterminer $F(K_0)$ et calculer la distance de Hausdorff entre K_0 et $F(K_0)$.

(b) Rappelons que $F(K) = w_1(K) \cup w_2(K)$ où $w_1(x, y) := \left(\frac{3}{4}x, \frac{3}{4}y\right)$ et $w_2(x, y) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$.
Montrer que F est une contraction sur l'espace $\mathcal{K}$ des compacts non vides du plan muni de la distance de Hausdorff.

(c) En appliquant un théorème vu au cours, déduire qu'il existe un unique compact non vide A tel que $A = w_1(A) \cup w_2(A)$ et que ce A est contenu dans le disque unité fermé.